Akademisk Afhandling

Om ett vidsträktare bruk af Qvadrat- och Rutetalens tabell vid Multiplikation,

hvilken

med Vidtberömda Filosofiska Fakultetens tillstånd

och under Præsidium

af

Mag. CARL JOH. Ds. HILL,

Math. Professor, R. N. O., L. K. V. A.,

för

Filosofiska Doktorsgraden

utgifves

af

ERIK BORGSTRÖM,

Filos. Kand., af Skånska Nationen,

att offentligen försvaras

å Mathematiska Lärosalen den 10 Juni 1850.

V.

Lund,

tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,

1850.

ACAD. LUGD.BAT. BIBL.

Dessa egenskaper kunna lätt algebraice bevisas, eller åtminstone arithmetice pröfvas.

IV). Halfvering och rutetäljning sker på samma sätt.

a) För smärre tal begagnas de yttersta visarne, sedan talet blifvit ökt med 1.

t. ex. $\left(\frac{66}{2}\right)^2_1 = (6,7)_1 = 1122$ (som är $= 33^2_1 = 33 \cdot 34$)

Ex. $\left(\frac{136}{2}\right)^2_1 = (13,7)_1 = 4692$ ($= 68^2_1$).

Grunden härtill är den, att tabellen närmast är inrättad, att gifva $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ äfven när x är udda.

T. ex. $\left(\frac{67}{2}\right)^2 = (33 + \frac{1}{2})^2 = 33^2 + 33 + \frac{1}{4} = 33^2_1 + \frac{1}{4} = 1122\frac{1}{4}$.

Der dock $\frac{1}{4}$ ej är utsatt, helst den vid det egentliga bruket häraf (nemligen till multiplication) ända går sjelfmant bort.

Cor. Man får derföre *qvadraten af de 4-siffriga tal*, som sluta *på* 5, om man sätter 25 efter rutetalet. Ex. $0335^2 = 112225$ och $4535^2 = 453^2_1|5^2 = 205662|25$.

b) För större tal gäller formlen:

$$\left(\frac{at+b}{2}\right)^2_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 t^2 + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2_1 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2_1\right) t + \left(\frac{b}{2}\right)^2_1$$

som fås af den för rutetalen när der för a och b sättes $\frac{a}{2}$ och $\frac{b}{2}$.

Den kan ock bevisas så: 1) $\left(\frac{x}{2}\right)^2_1 = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x^2 + 2x}{4} = \frac{(x+1)^2 - 1}{4}$ $= \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. 2) Således är $\left(\frac{at+b}{2}\right)^2_1 = \left(\frac{at+b+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, som åter enligt qvadrat-formlen gör $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 t^2 + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a+1}{2}\right)^2\right) t +$ $+ \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, der $\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2_1$ och således $\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 -$ $- \left(\frac{b-a+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2_1 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2_1$, hvadan formlen *b)* följer.

Men är $b < a$, så tas $\left(\frac{a-b}{2} - 1\right)^2_1$ eller $\left(\frac{a-b-2}{2}\right)^2_1$ för $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2_1$.

Den samma gäller om tabellens tal (med $W = 2V + 1$); Ty låt W_1 vara det rutetal, som står midtför W, och är $= V^2_1 = \left(\frac{W-1}{2}\right)^2_1$, (efter $W = 2V + 1$),

så är $(at+b)_1 = \left(\frac{at+b-1}{2}\right)^2_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 t^2 + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2_1 - \left(\frac{b-1-a}{2}\right)^2_1\right) t + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 t^2 + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b_1 - (b-a)_1\right) t + b_1$.

För rutetalen få derföre tagas de, som tabellen omedelbarligen ger.

Eller utförligare så: Då det rutetalet V^2_1 som ini tabellen svarar mot roten (argumentet) W sättes (såsom i dess öfverskrift) $= (\frac{1}{2}w')^2_1)$, så blir $V^2_1 = (\frac{1}{2}w')^2_1$, och följakteligen $V = \frac{1}{2}w'$ (eller också $\frac{1}{2}w' = -V-1$, hvilket negativa värde vi dock vilja lemna obegagnadt), och således $w' = 2V = W-1$. Nämde rutetal blir således $= V^2_1 = V.(V+1) = \frac{W-1}{2} \cdot \frac{W+1}{2} = \frac{W^2-1}{4}$, hvilket värde vi ock kunna ange med W_1 eller med 2^0W, som då betyder denna helfunction af andra graden $= \frac{W^2-1}{4}$ eller $\left(\frac{W}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Till följe häraf är $2^0(-u) = 2^0u = \frac{u^2-1}{4} =$ $= 0, 2, 6, 12$ &c. när $\pm u = 1, 3, 5, 7$ &c. Häraf fås också $2^0(W+y) =$ $= \left(\frac{W+y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{W}{2}\right)^2 + \frac{W \cdot y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ eller $2^0(W+y) =$ $= \left(\frac{W}{2}\right)^2 + 2^0y + \frac{W \cdot y}{2}$, och således, om för W sättes $a.t$, $2^0(at+y) = \left(\frac{at}{2}\right)^2 +$ $+ 2^0y + \frac{ayt}{2}$, och särdeles, om t göres $= -1$, så blir $2^0(y-a) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^0y -$ $\frac{ay}{2} = 2^0(a-y)$, och härur fås genom öfverflyttning $\frac{ay}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^0y - 2^0(a-y)$, genom hvars införande $2^0(at+y)$ blir $= \left(\frac{at}{2}\right)^2 + 2^0y + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^0y - 2^0(a-y)\right).t$. Sättes derföre här $t = 1000 = 1'$, $t^2 = 1\cdot = 1$ million, så få vi $2^0(a.1'+y) =$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 .1\cdot + 2^0y + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^0y - 2^0(a-y)\right).1'$, genom hvilken formel vi kunna utsträcka den 3-siffrige tabellen derhän, att den ersätter en 6-siffrig. Man märker lätt, att uppställningen blir alldeles analog med den i föregående fall.

Men vill man blott utsträcka den till en 4-siffrig, eller en siffra mera än i en förhandvarande tabell, så göres $t = 10$, då förra formlen ger $2^0(10a \pm y) =$ $\left(\frac{a}{2}\right)^2 .100 + 2^0y \pm 5ay$, hvarvid man, vid behof, gör sidsta siffran y negativ, så att a blir jemnt tal. Men i de fall, då 2^0W brukas, är W och således $+y$ udda $= y = 1, 3, 5, 7, 9$, härföre blir $5ay = 5a, 15a, 25a, 35a, 45a = 10.\frac{a}{2}$, $10\left(a+\frac{a}{2}\right)$, $\frac{1}{2}.100.\frac{a}{2}$, $100.\frac{a}{4} + 10a$, $100.\frac{a}{2} - 10.\frac{a}{2}$, efter hvilka formler man

kan räkna, helst qvadrattabellen ger $\frac{a}{2} = V$, om man går in med $W = a$. Så t. ex. blir $15a = 10.(W + V)$, som kan omedelbart utskrifvas. Således blir $2^0(10a \pm 1) = 100.\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pm 10.\frac{a}{2}$, $2^0(10a \pm 3) = 100.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \pm 10(W+V)$, $2^0(10a \pm 5) = 100.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 6 \pm \frac{1}{2}.V.100$, $2^0(10a \pm 7) = 100.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 12 \pm (100.\frac{a}{4} + 10a)$, samt $2^0(10a \pm 9) = 100.\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 20 \pm (100V - 10V)$, (allt om $W = a$).

$$\text{Ex.}\quad 2^0(992|9) = \begin{cases} 246016|20 \\ \quad\;\; 496| \\ -\;\; 49|6 \end{cases}$$
$$= 246462\;60 \text{ (som ock är} = \tfrac{1}{4}.(9929^2 - 1)).$$

$$\text{Ex.}\quad 2^0(350|3) = \begin{array}{r} 30625|02 \\ +\;52|5\;\; \\ \hline 30677\;52. \end{array} = 1751^2_1$$

$$\text{Ex.}\quad 2^0(5239) = 2^0(524|\bar{1}) = \begin{cases} 68644|00 \\ -\;26|2- \end{cases} = 68617\;80.$$

$$\text{Ex.}\quad 2^0(351|7) = 2^0(352|\bar{3}) = \begin{array}{r} 30976|02 \\ -\;52|8- \\ \hline 30923\;22. \end{array}$$

$$\text{Ex.}\quad \left(\frac{152|66}{2}\right)^2_1 = \left(\frac{142}{2}\right)^2 t^2 + (6,7)_1 = 57,76|11,22$$
$$\left(\left(\frac{152}{2}\right)^2 + (6,7)_1\right)t = 68|98$$
$$-\left(\frac{84}{2}\right)^2_1.t \qquad -18|06$$
$$\text{gör} = 5827\;0322.$$

Anm. Man kan ock finna $\left(\frac{x}{2}\right)^2_1$ genom qvadrering enligt den nyss vunna formeln $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, när x är udda, och således $x + 1$ jemnt; eller äfven i motsatt fall, om man följer formlen:

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = \left(\frac{2a+1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,((a+1)^2 + a^2) - \tfrac{1}{4} = 2.\left(\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) - \tfrac{1}{4}$$

som ger $\left(\frac{x}{2}\right)^2_1 = \frac{1}{2}.\left(\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2}$. Dervid äro $\left(\frac{x+2}{2}\right)^2$ (såsom $= \left(\frac{x}{2} + 1)^2\right)$ och $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ två närstående qvadrattal.

$$\text{Ex.}\quad \left(\frac{1922'800}{2}\right)^2_1 = \begin{cases} 924289960000 \\ +\qquad 961400 \end{cases}$$
$$= 924290921400.$$

$$\text{Ex. } \left(\frac{405'874}{2}\right)_1^2 = \begin{cases} \left(\frac{404}{2}\right)^2 t^2 + \left(\frac{1874}{2}\right)_1^2 & = 40'804 \mid 878'906 \\ + \ (\alpha + \beta) \text{ tusend} & = \quad 919 \mid 710 \\ - \left(\frac{1470}{2}\right)_1^2 t & = -'540 \mid 960 \ - \end{cases}$$

(columns headed α and β)

gör = 41 183 628 906.

Der $\left(\frac{1874}{2}\right)_1^2$ tas ur qvadrattabellen, såsom medlet i hela tal af $\left(\frac{1876}{2}\right)^2$ och $\left(\frac{1874}{2}\right)^2$ och äfvenså $\left(\frac{1470}{2}\right)_1^2 = M\left(\left(\frac{1472}{2}\right)^2 + \left(\frac{1470}{2}\right)^2\right)$.

V). Till multiplikation.

a) Om åtminstone den ena factorn är jemn $= 2a$, så ega vi redan formlen $(2a) . b = (a^2 + b^2 - (a-b)^2)$, (Den ger ock i almänhet $a . b$, men då skulle denna qvadratsumma, som ofta är ett bra stort tal, halfveras).

Ex. 1. Begäres producten af 1164'338 $= 2B$
och 758'463 $= A$.
Då är $B =$ 582'169
således 176'294 $= A-B$

$A^2 =$ 575'266·122'369
$B^2 =$ 338'920 744'561
$-(A-B)^2 =$ - 31'079'574'436 —
hvarföre producten $2B . A =$ 883'107·292'494.

b) Om bägge äro udda, eller ock bägge jemna, så har man formlen $a . b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, der blot tvenne qvadrater (på halfva tal) ingå.

Så för samma tal: Ex. 2.

$A =$ 758'463 } Qvadraterne på dessas halfva
$B =$ 582'169 } summa och skilnad =
blir $A + B =$ 1340'632 | 449'323·539'856
$A - B =$ 176'294 | —7'769·893'609 —
gör = 441'553·646'247 $= A . B$

som är hälften af föregående product.

c) Är ena factorn jemn och den andra udda, så antar föregående formeln denna form $a . b = (\alpha + \frac{1}{2})^2 - (\beta + \frac{1}{2})^2$ som gör $= \alpha_1^2 - \beta_1^2$, så att producten då är skilnaden mellan 2:ne rutetal eller $= \left(\frac{A}{2}\right)_1^2 - \left(\frac{B}{2}\right)_1^2$, om $A = 2\alpha = (a+b)$-1 och $B = 2\beta = (a-b)-1$, men tabellen är så inrättad, att man i stället går

omedelbart in med $a+b$ och $a-b$ i stället för med α & β. Der står nemligen ytterst $A+1=W$ för A, så att $W=2V+1$ $(=a\pm b)$. (Man kan ock åter-föra detta fall till det föregående, genom att afsöndra 1 från endera factorn).

Ex. 1.	a = 1164'338	rutetalen till dessas halfva	
	b = 758'463	summa och skilnad äro:	
	$a+b$ = 1922'801	924'290·921 400	
	$a-b$ = 405'875	—41'183·628'906	

således blir producten ab = 8831'07·292'494.

Anm. 1. Man kan ock multiplicera i millesimal- (eller myriad-)systemet, såsom AB = 758'·582' + 758'. 169 + 463.582' + 463 . 169 =

1)	2)	3)	4)
= { 758' / 582'	{ 758' / 169	{ 582' / 463	{ 463 / 169
+ | 1340 . . . 448900	+ | 927 . . . 214832	+ | 1045 . . . 273006	+ | 632 . . 99856
— | 176 . . . —7744	— | 589 . . . -86730	— | 119 . . . —3540	— | 294 . . -21609
441156·	128102'	269466'	78247
			269466
			128102
			441156

således AB = 441553646247

eller sammandraget

Ex. 2. A = 758	463'					
B = 582	169'		(1	4)		
+ | 1340	+632	. . .	+ 448900	|099	856}	
— | 176	—294		— 7744	|-21	609}	
	+927	. . .	+214	832		
	—589	. . .	— 86	730		. . . 2)
+ | 1045		. . . . . .	+273	006		
— | 114			— 3	540		. . . 3)

$A \cdot B$ = 441553 · 646 247.

Anm. 2. När ena factorn (f) ej har flere siffror än tabellen t. ex. blott 3, kan räkningen uppställas så:

		a	b	c					
Ex. 3.	A =	353	567	239					
	f =		365						
$a+f$ =	+	718		604	$= f+c$	+ 128881	091	204	+
$(f-a)$ =	—	12		126	$= f-c$	— 36	—3	969	—
$b+f$ =	+		32			+ 217	156	+	
$b-f$ =	—		202			— 10	201	—	

$A . f$ = 129052 042 235.

Men håller den mindre factorn många flere siffror, så får den söndras i flere sådane enklare delar, och multiplication göras särskilt med hvardera, eller hellre

räknar man med den i sin helhet genom qvadrater, eller tar först en åtminstone lika mångsiffrig del af den andra. Ibland kan man afsöndra en eller ett par af dess första eller sidsta siffror, hvarmed multipliceras särskilt på vanligt, eller något eget gint sätt, om de afsöndrade dertill äro tjenlige.

e) Att multiplicera med vanliga qvadrattabeller. Det sker efter formlen $a \cdot b = c^2 - d^2$, med $c = \frac{1}{2}(a + b)$ = arithmetiska medlet af factorerne a & b, samt $d = \frac{1}{2}(a - b) = c - b$. Reglen blir derföre 1) om den ena af factorerne är udda och den andra jemn, så göres bägge jemna, (eller ock bägge udda), genom att från den udda afsöndrade 1, och dermed särskilt multiplicera den jemna, eller lägga denna till produkten af de jemngjorda. 2) När så bägge äro jemna, (eller bägge udda), så tar man deras Ar. medel c, drar derifrån den mindre (b), då produkten är skilnaden emellan medlets (c) och restens qvadrater. (Som prof måste $a = c + d$ eller $a - c = c - b$). (Man kan ock först uträkna $d = \frac{1}{2}(a - b)$, så $c = b + d$, men vanligtvis finnes ej d så lätt i en operation som c).

Ex. 1.	a = 377		
	b = 259		
2)——			□
	c = 318	. . . +	101'124
	d = 59	. . . —	3'481
		$a . b$ =	97'643.

Ex. 2.	a = 378		
	b = 258		
2)——			
	c = 318	. . .	101'124
	d = 60	. . .	—3'600
		$a . b$ =	97'524.

Ex. 3.	a = 378 = 378	. . .	378
	b = 259 = 258 + 1		
	2)——		
	c = 318	. . .	101'124
	d = 60		—3 600
			97 902

eller 377 + 1		
259	. . .	259
2)——		
318	. . .	101'124
59		—3'481
	$a . b$ =	97'902.

Ex. 4.	a = 163637		
	b = 35769		
	)——		
	c = 99703	□	9940688209
	d = 63934	—	4087556356
		$a . b$ =	5853131853.

Ex. 5.	85219	
	19734	
	)——	+19734+
	52476+	+2753730576+
	32742	—1072038564—
		1681711746.

Ex. 6. 357912468013579 × 2468023579.

Ludolf räknar pag. 55—57 detta exempel, men får blott de 6 första och 6 sidsta siffrorne riktiga.